

2010 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）： A

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）： by016

所属学校（请填写完整的全名）： 北京邮电大学

参赛队员（打印并签名）： 1. 刘自强

2. 陈俊龙

3. 罗晓晖

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）： 贺祖国

日期： 2010 年 9 月 12 日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2010 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编号专用页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人										
评分										
备注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

储油罐的变位识别与罐容表标定

摘要

本文针对倾斜的平顶椭圆型储油罐和球冠端面圆柱形储油罐模型进行分析和建模，意在解决油罐发生倾斜时罐容表的重新标定问题。主要根据模型的几何特性运用积分法建模，辅以近似算法，简化运算量，并结合最小二乘、蒙特卡洛模拟和坐标轮换算法对竞赛问题作出了解答，给出了罐体变位后的罐容表标定值。

问题一中以平顶椭圆型储油罐模型为研究对象，用积分法根据模型几何特性建模得出油位高度和罐容积的函数关系，将其与实验得出的数据比较，分析误差并拟合出修正项，修正后的函数关系与实际数据的误差仅为 0.8%，并由此给出罐体变位后油位高度间隔为 1cm 的罐容表标定值；以变位与无变位的罐容值函数的绝对差值和相对差值作为评价指标，说明变位对罐容表的影响。

问题二中以球冠端面圆柱型储油罐为研究对象，运用积分并辅以近似算法得出罐内储油量与油位高度及变位参数之间的一般关系；从题中所给数据分析出实际油位高度和油品体积的对应关系，运用最小二乘法得出优化模型，并用蒙特卡洛模拟和坐标轮换算法确定变位参数的值，由此确定了与实际几乎无误差的一定变位参数下的油位高度与罐容量的函数关系；并由此给出罐体变位后油位高度间隔为 10cm 的罐容表标定值。

本文的特色在于采用近似计算方法简化计算过程，提高运算效率，且运用最小二乘法建立优化模型、利用计算机模拟手段和基本搜索算法，拟合出精度较高的函数关系，实现了罐容表标定的自动化和实时化。

关键词：储油罐 罐容表 积分 最小二乘法 蒙特卡洛模拟 坐标轮换

目录

摘要.....	1
一、问题重述.....	3
二、问题分析.....	3
三、基本假设.....	4
四、符号说明.....	4
五、问题一.....	5
5.1 问题分析.....	5
5.2 油位高度与罐容函数关系推导.....	5
5.2.1 模型建立.....	5
5.2.2 模型求解与修正.....	8
5.3 油罐变位后对罐容表的影响.....	12
5.3.1 模型建立.....	12
5.3.2 模型求解.....	12
5.4 变位后修订的罐容表.....	13
六、问题二.....	14
6.1 问题分析.....	14
6.2 罐内储油量与油位高度及变位参数函数关系的推导.....	14
6.3 用最小二乘法和坐标轮换搜索法确定变位参数.....	16
6.3.1 模型建立.....	16
6.3.2 模型求解.....	17
6.4 变位后修订的罐容表.....	17
6.5 模型检验.....	18
七、灵敏度分析.....	19
八、模型拓展.....	20
九、模型评价.....	20
8.1 模型优点.....	20
8.2 模型缺点.....	20
十、参考文献.....	21

一、问题重述

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（以下称为变位），从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。

考虑用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

(1) 研究罐体变位后对罐容表的影响，利用如图4的小椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体）在罐体无变位和倾斜角为 $\alpha=4.1^{\circ}$ 的纵向变位两种情况下得出的实验数据，建立数学模型表明罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为1cm的罐容表标定值。

(2) 对于实际储油罐，建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的一般关系。利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据，根据所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值。并进一步利用实际检测数据来分析检验模型的正确性与方法的可靠性。

二、问题分析

随着社会经济的发展，汽车逐渐普及，路边上加油站的数目也不断增加。一般加油站都使用卧式油罐存储油料。许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化，从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。现在的一个问题是，如何计算油罐中所剩油品的体积，这个问题在加油站管理中有很重要的意义。

问题一中，研究对象为卧式平顶椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体）模型，先挖掘题目中此模型的几何关系，用积分法建立模型推导出无变位和有变位时油位高度与罐容的函数关系，将其与实验得出的数据比较，发现存在较大误差，分析误差产生原因并拟合出修正项，得出与实际吻合得很好的函数，再以变位后函数与无变位函数的绝对差值和相对差值作为罐体变位对罐容表的影响指标，建立模型研究罐体变位对罐容表的影响，最后给出罐体变位后油位高度间隔为1cm的罐容表标定值。

问题二中，研究对象为卧式球冠端面圆柱型储油罐，首先用积分法求出在纵向倾斜角度 α ，横向偏转角度 β 的变位下，油罐中油品体积 $V_{\text{总}}$ ，其中油罐直筒部分圆柱体体积可借用问题一中模型算出，球冠体积直接积分很复杂，可运用一个近似的方法得出，即 $V_{\text{总}} = V_{\text{体}} + 2V_{\text{球缺}}$ ，得出罐内储油量与油位高度及变位参数之间的一般关系后，利用附件中所给实验数据，运用最小二乘法和坐标轮换法确

定变位参数 α 、 β ，同时给出罐体变位后油位高度间隔为 10cm 的罐容表标定值；最后运用附件中所给数据和对应拟合值做差检验模型的正确性与方法的可靠性。

三、基本假设

- 1) 问题一中忽略油位探测装置、注油口、检查口和出油口等结构，不考虑油罐壁的厚度，将储油管视为椭圆柱体。
- 2) 不考虑油位探针的油浮子与罐壁之间的静摩擦力造成的油品计量不准引起的误差。
- 3) 不考虑由于油品密度不均匀带来的油品计量不准。
- 4) 不考虑由于进油或出油造成的油品表面波动造成的油品计量不准。
- 5) 忽略温度对油品体积的影响。
- 6) 问题二中忽略油位探测装置、注油口、检查口和出油口等结构，不考虑油罐壁的厚度，将储油管直筒部分视为圆柱体。

四、符号说明

问题一	
a	椭圆柱截面椭圆的半长轴
b	椭圆柱截面椭圆的半短轴
h	任一个截面的液面高度
H	油位探针显示示数
S	石油在椭圆柱截面椭圆切面中的面积
V	罐容积
L	平顶卧式椭圆直筒长度
θ	油罐与水平方向夹角
$V_{修}(H)$	修订后的罐容积
$f_{修}(H)$	修订项

问题二	
α	纵向倾斜角度
β	横向偏转角度
$V_{总}$	油罐中油品体积
$V_{体}$	油罐直筒部分油品体积
$V_{球缺}$	球冠部分油品体积
r	油罐直筒部分截面半径
R	球冠所在球面半径
$G(\alpha, \beta)$	计算值和测量值的总偏差

五、问题一

5.1 问题分析

此问中研究对象为卧式平顶椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体）模型，先挖掘题目中此模型的几何关系，用积分法建立模型推导出无变位和有变位时油位高度与罐容的函数关系，将其与实验得出的数据比较，添加修正项得出与实际吻合得很好的函数，再以变位后函数与无变位函数的绝对差值和相对差值作为罐体变位对罐容表的影响指标，建立模型研究罐体变位对罐容表的影响，最后给出罐体变位后油位高度间隔为 1cm 的罐容表标定值。

5.2 油位高度与罐容函数关系推导

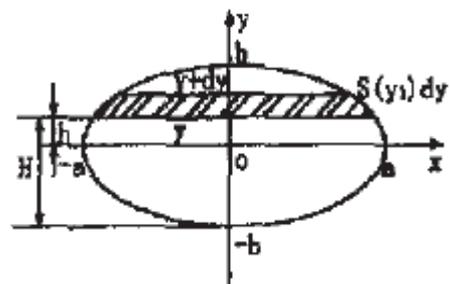
5.2.1 模型建立

1) 筒体（如右图所示）的截面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

可知 $x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$

2) 故截面面积为



$$S(y) = \int_{-b}^y 2xdy = \int_{-b}^y \frac{2a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} dy = \frac{ab\pi}{2} + ay \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} + ab \arcsin \left[\frac{y}{b} \right]$$

3) 由高度和纵坐标的关系得:

$$y = h - b$$

所以截面面积与高度的关系为

$$S(h) = \frac{ab\pi}{2} + a(h - b) \sqrt{1 - \frac{(h - b)^2}{b^2}} + ab \arcsin \left(\frac{h - b}{b} \right)$$

4) 若椭圆油罐没有变位, 罐容积 V 与油位显示高度 H 函数关系为:

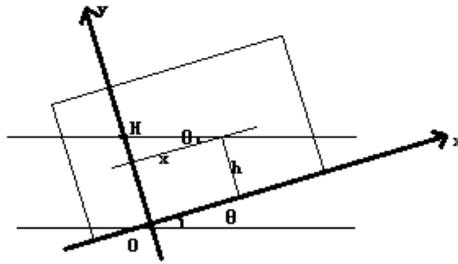
$$V(H) = S(H)L = \frac{ab\pi}{2} L + a(H - b)L \sqrt{1 - \frac{(H - b)^2}{b^2}} + abL \arcsin \left(\frac{H - b}{b} \right)$$

5) 若椭圆油罐与水平方向有 θ 角变位, 椭圆倾斜直圆筒横截面及其坐标系建立如下图所示, x 轴贴向圆筒底部, y 轴沿油位探针方向, H 为油位探针示数。

可得关系:

$$h = H - x \tan \theta$$

代入 (3) 中式得沿 x 轴积分, 每个 x 值对应的切面面积为:



$$S(x) = \frac{ab\pi}{2} + ab \arcsin \left(\frac{-b + H - x \tan \theta}{b} \right) + a(-b + H - x \tan \theta) \sqrt{1 - \frac{(-b + H - x \tan \theta)^2}{b^2}}$$

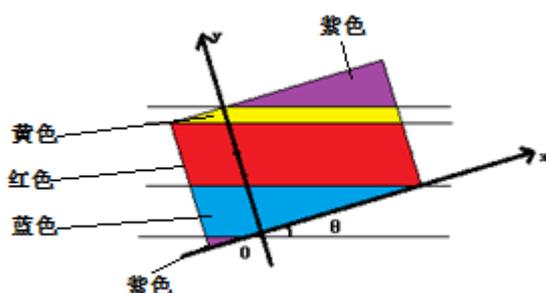
6) 将切面面积沿 x 轴积分, $x_{\text{上}}$ 、 $x_{\text{下}}$ 分别为液面在 x 轴投影的上下限, 得罐中石油体积 V 与油位显示高度 H 函数关系得:

$$\begin{aligned} V(H) &= \int_{x_{\text{下}}}^{x_{\text{上}}} S(x) dx \\ &= \int_{x_{\text{下}}}^{x_{\text{上}}} \left(\frac{ab\pi}{2} + ab \arcsin \left[\frac{-b + H - x \tan \theta}{b} \right] \right. \\ &\quad \left. + a(-b + H - x \tan \theta) \sqrt{1 - \frac{(-b + H - x \tan \theta)^2}{b^2}} \right) dx \\ &= F(x_{\text{上}}) - F(x_{\text{下}}) \end{aligned}$$

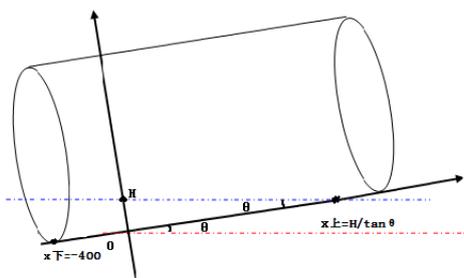
其中

$$F(x) = \frac{ab\pi}{2}x + ((-b + H - x\tan\theta)\arcsin[\frac{-b + H - x\tan\theta}{b}] + \sqrt{b^2 - (-b + H - x\tan\theta)^2}) \frac{-ab}{\tan\theta} + \frac{1}{3b} 2\text{acsc}^2(2\theta)(H\cos\theta - x\sin\theta)((2b - H)\cos\theta + x\sin\theta)\sqrt{(H - x\tan\theta)(2b - H + x\tan\theta)}$$

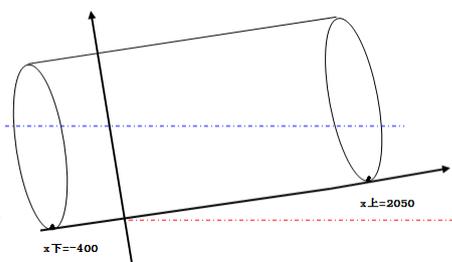
7) 分情况讨论:



- i. 当液面处于紫色区域时，油位探针失去作用，油位显示示数恒为 0 或最大值；
- ii. 当液面处于蓝色区域时，如图一： $x_{上} = \frac{H}{\tan\theta}$ ， $x_{下} = -400\text{mm}$ ；
- iii. 当液面处于红色区域时，如图二： $x_{上} = 2050\text{mm}$ ， $x_{下} = -400\text{mm}$ ；



图一



图二

- iv. 当液面处于黄色区域时，用整个椭圆柱体体积减去右上角紫色体积，将问题转化为求解右上角紫色体积，

$$V(H) = V_{总} - V_{右上紫} = V_{总} - (F(x_{上}) - F(x_{下}))$$

其中 $x_{上} = \frac{H}{\tan\theta}$ ， $x_{下} = -400\text{mm}$ ；

5.2.2 模型求解与修正

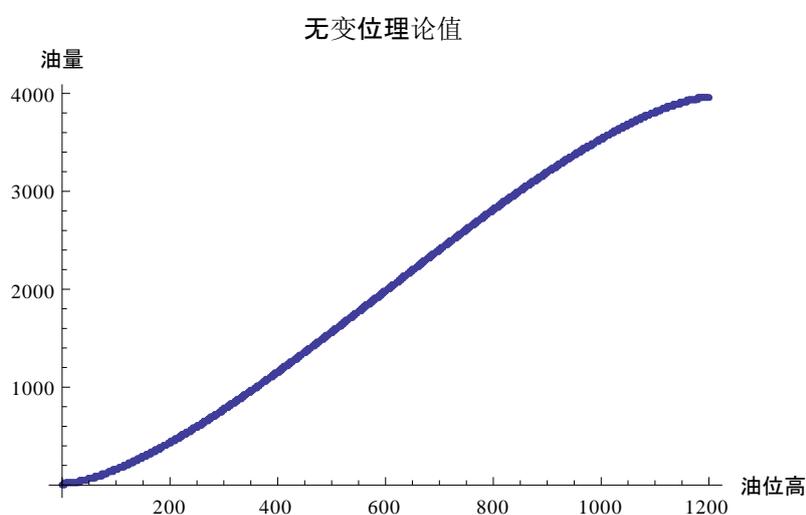
5.2.2.1 无变位时

1) 积分模型得出的罐容积 V 与油位显示高度 H 函数关系:

$$V(H) = S(H)L = \frac{ab\pi}{2}L + a(H-b)L\sqrt{1 - \frac{(H-b)^2}{b^2}} + abL\arcsin\left(\frac{H-b}{b}\right)$$

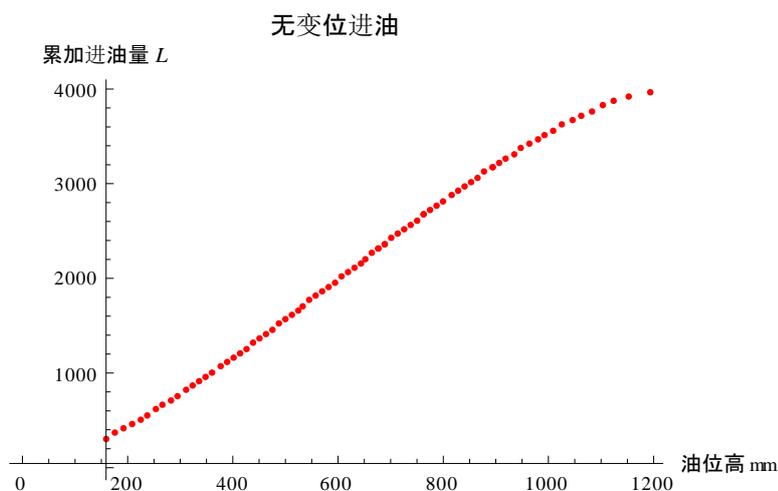
其中 $a = 890\text{mm}$, $b = 600\text{mm}$, $L = 2450\text{mm}$

相应的图形为图三:



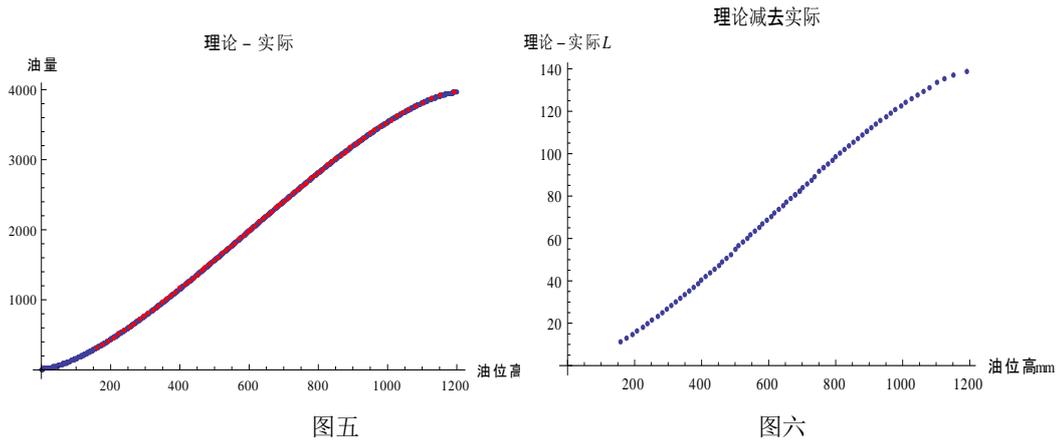
图三

2) 根据附件中所给实验数据, 得到图四:



图四

3) 比较理论曲线和实验数据曲线, 得到图五, 并计算理论值与实验数据的差值, 如图六:



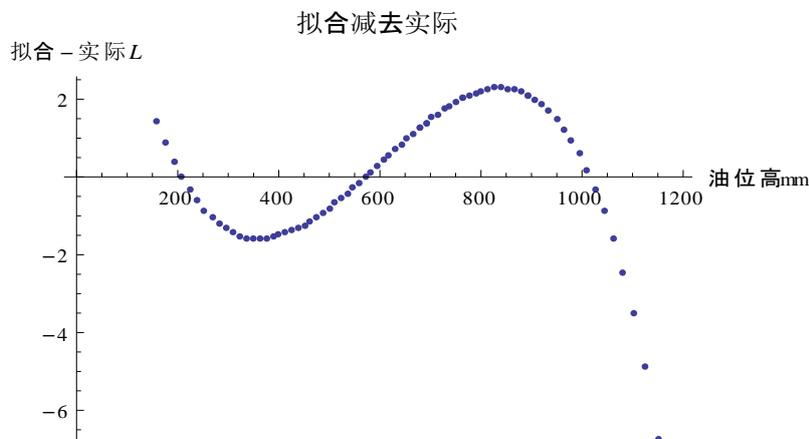
由图四可知理论与实际数据的误差均值为 75.5266L，均方差为 1326.88L。

4) 分析，加修正项。由于理论推导的函数关系与实验数据误差很大，经过查找相关资料^[3]，可知误差可能来源于油位探针、注油口和出油管的大小影响等，于是需要探求一个修正量，使理论的罐容积 V 与油位显示高度 H 函数关系更符合实际。

从图四误差的走势来看，修正量近似与高度的一次函数，经拟合定为 $f_{修}(H) = 0.135H - 12$ ，即罐容积 V 与油位显示高度 H 函数关系修订为：

$$\begin{aligned}
 V_{修}(H) &= V(H) + f_{修}(H) \\
 &= \frac{ab\pi}{2}L + a(H-b)L\sqrt{1 - \frac{(H-b)^2}{b^2}} + abL\arcsin\left(\frac{H-b}{b}\right) \\
 &\quad + 0.135H - 12
 \end{aligned}$$

修订后 $V_{修}(H)$ 与实验数据的差值为图七。



图七

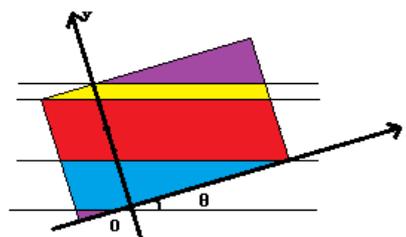
由图七可知理论与实际数据的误差均值为 6.63173×10^{-14} L，均方差为

4. 47895L。此误差非常小，可知添加修正项后的函数 $V_{修}(H)$ 曲线与实际吻合得很好。

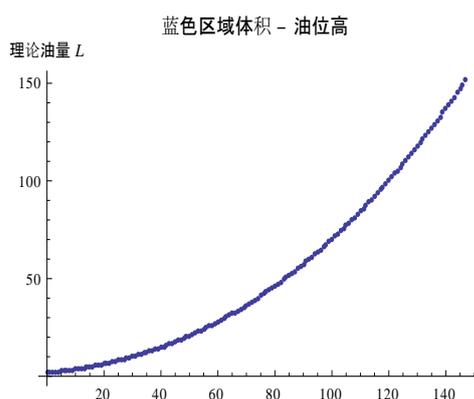
5.2.2.2 有变位时

模型中的数值为 $a = 0.89\text{m}$ ， $b = 0.6\text{m}$ ， $\theta = 4.1^\circ$

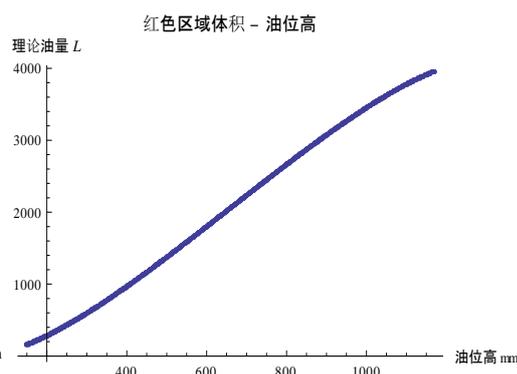
1) 根据有位变的模型分析中的结论，代入具体数值分别可得到液面处于蓝色、红色、黄色区域时罐容积 V 与油位显示高度 H 函数曲线，如图八、图九、图十所示，合起来总曲线为图十一：



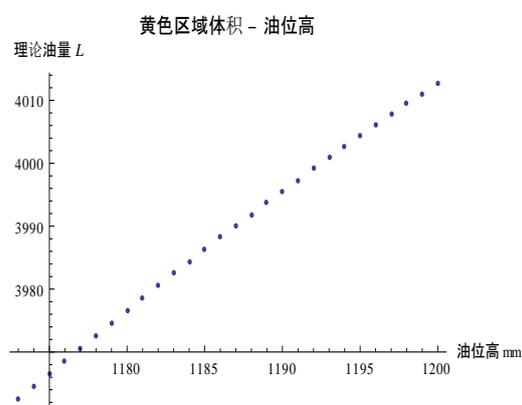
示，合起来总曲线为图十一：



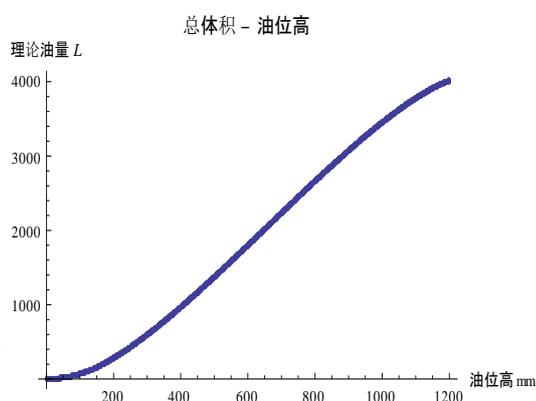
图八



图九



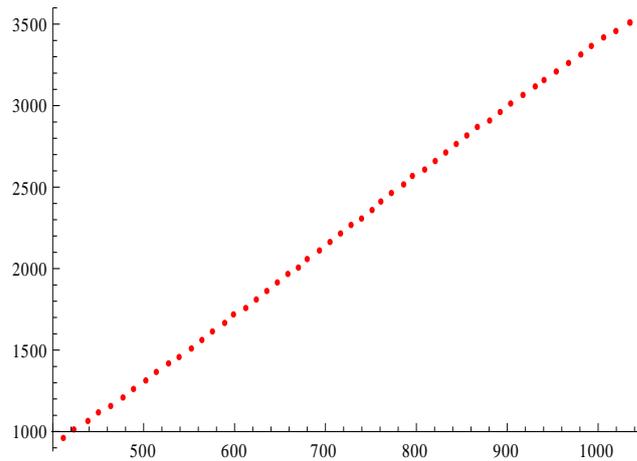
图十



图十一

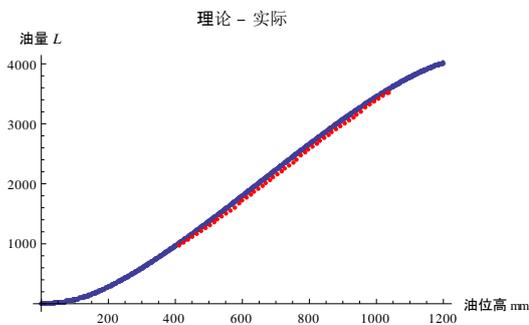
2) 根据附件中所给实验数据，得到实际上油标显示高度和实际油量的曲线图

十二：

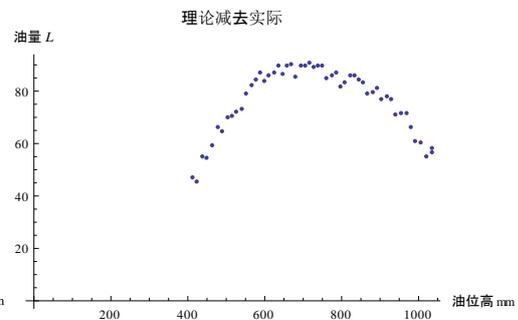


图十二

3) 比较理论曲线和实验数据曲线, 得到图十三, 并计算理论值与实验数据的差值, 如图十四:



图十三



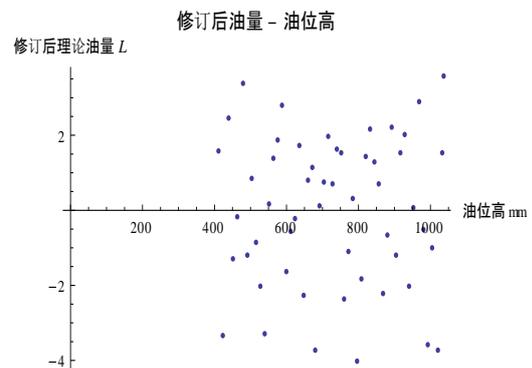
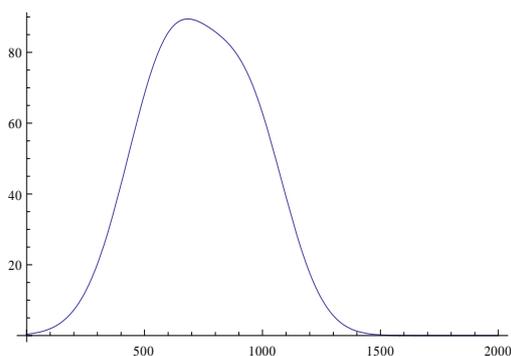
图十四

4) 分析, 加修正项。从图十四误差的走势分析, 经拟合 $f_{\text{修}}(H)$ 定为

$$f_{\text{修}}(H) = 79.37e^{-\left(\frac{x-609.3}{264.4}\right)^2} + 56.97e^{-\left(\frac{x-945.1}{232.6}\right)^2}$$

, 即罐容积 V 与油位显示高度 H 函数关系修订为: $V_{\text{修}}(H) = V(H) + f_{\text{修}}(H)$

差值拟合图形为图十五, 修订后 $V_{\text{修}}(H)$ 与实验数据的差值为图十六。



图十五

图十六

由图十六分析可得，修正后的理论值与实验所得数据误差均值为 $-0.00248169L$ ，均方值为 $4.03514L$ ，相对误差率的绝对均值为 0.8% 。此误差非常小，可知添加修正项后的函数 $V_{修}(H)$ 曲线与实际吻合得很好。可由此曲线分析油罐变位后对罐容表的影响和确定变位后修订的罐容表。

5.3 油罐变位后对罐容表的影响

5.3.1 模型建立

以变位后函数与无变位函数的绝对差值（绝对可信度）和相对差值（相对可信度）作为评价罐体变位对罐容表的影响指标，建立模型：

变位后函数与无变位函数的绝对差值：

$$V_{差}(H, \theta) = |V_{变}(H, \theta) - V_{原}(H)|$$

这是反应真实储油量和标定值的差值，差值越大，灌容标定表的不可信度就越强，变位的影响也越大，因此也可以称之为绝对可信度

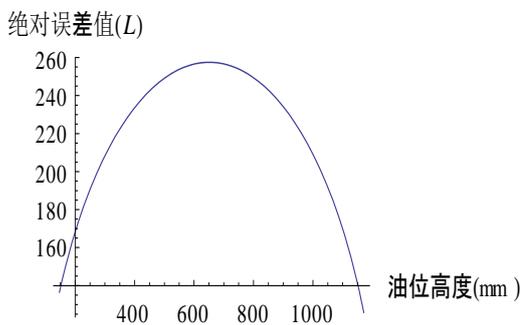
变位后函数与无变位函数的相对差值：

$$T(H, \theta) = \frac{|V_{变}(H, \theta) - V_{原}(H)|}{V_{原}(H)}$$

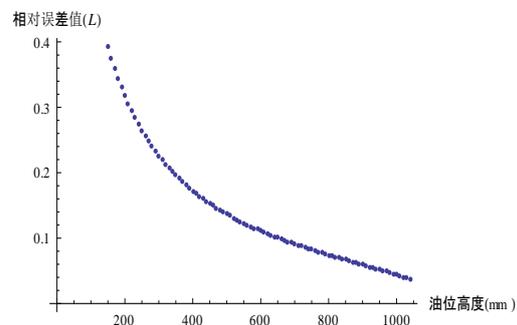
这是反应真实储油量和标定值的差值占真时存储量的大小，其值越大说明对应的灌容标定值相对于真实体积就越不可信，变位对其影响也越大，因此也可以称之为相对可信度

5.3.2 模型求解

将 $a = 0.89m$ ， $b = 0.6m$ ， $\theta = 4.1^\circ$ 代入上述公式得图十七和图十八：



图十七



图十八

从图十七中可以知道：随着 H 的增加绝对误差先减少后增加，说明随着 H 值的增加罐容表上的标定值与实际中的存储量的差值是先增大后减小，如果从减小误差的角度考虑，处在中间的标定值最不可信。变位对处在中间高度的标定值影响较大。

从图十八可以知道：随着H的增加相对误差是逐渐减少的，而当H在趋近0是其相对误差是不容忽视的，因此从相对误差值来说，H越大其对标定值的影响越小。反而是H很低的时候对标定值的影响很大。

5.4 变位后修订的罐容表

油位高度 (cm)	实际油品体 积 (L)	油位高度 (cm)	实际油品体 积 (L)	油位高度 (cm)	实际油品体 积 (L)
1	3.07	41	959.70	81	2618.29
2	5.71	42	996.67	82	2660.77
3	9.32	43	1034.00	83	2703.09
4	13.99	44	1071.61	84	2745.22
5	19.79	45	1109.51	85	2787.17
6	26.79	46	1147.72	86	2828.92
7	35.08	47	1186.22	87	2870.48
8	44.70	48	1225.02	88	2911.82
9	55.72	49	1264.12	89	2952.96
10	68.19	50	1303.52	90	2993.86
11	82.15	51	1343.20	91	3034.54
12	97.67	52	1383.18	92	3074.97
13	114.78	53	1423.45	93	3115.15
14	133.52	54	1464.01	94	3155.06
15	153.94	55	1504.84	95	3194.69
16	175.84	56	1545.95	96	3234.02
17	198.98	57	1587.33	97	3273.03
18	223.22	58	1628.96	98	3311.69
19	248.47	59	1670.84	99	3349.99
20	274.63	60	1712.95	100	3387.90
21	301.65	61	1755.28	101	3425.38
22	329.45	62	1797.81	102	3462.40
23	358.00	63	1840.54	103	3498.94
24	387.24	64	1883.43	104	3534.95
25	417.13	65	1926.47	105	3570.39
26	447.62	66	1969.64	106	3605.22
27	478.69	67	2012.91	107	3639.40
28	510.30	68	2056.28	108	3672.88
29	542.42	69	2099.70	109	3705.61
30	575.02	70	2143.17	110	3737.54
31	608.08	71	2186.66	111	3757.47
32	641.57	72	2230.15	112	3791.59
33	675.47	73	2273.61	113	3823.73
34	709.77	74	2317.03	114	3853.89

35	744.44	75	2360.39	115	3882.10
36	779.48	76	2403.66	116	3908.39
37	814.86	77	2446.84	117	3932.80
38	850.59	78	2489.90	118	3955.36
39	886.64	79	2532.84	119	3976.10
40	923.01	80	2575.64	120	3995.06

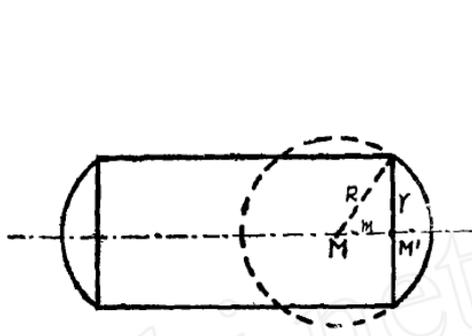
六、问题二

6.1 问题分析

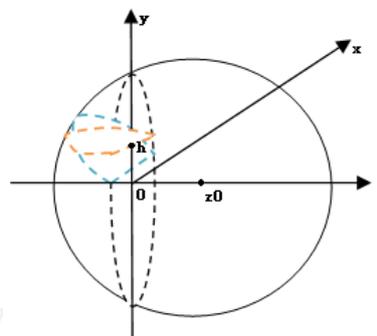
此问中研究对象为卧式球冠端面圆柱型储油罐，首先用积分法求出在纵向倾斜角度 α ，横向偏转角度 β 的变位下，油罐中油品体积 $V_{\text{总}}$ ，其中油罐直筒部分圆柱体体积可借用问题一中模型算出，球冠体积直接积分很复杂，可运用一个近似的方法得出，即 $V_{\text{总}} = V_{\text{体}} + 2V_{\text{球缺}}$ ，得出罐内储油量与油位高度及变位参数之间的一般关系后，利用附件中所给实验数据，运用最小二乘法法和坐标轮换法确定变位参数 α 、 β ，同时给出罐体变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值；最后运用附件中所给数据和对应拟合值做差检验模型的正确性与方法的可靠性。

6.2 罐内储油量与油位高度及变位参数函数关系的推导

1) 针对卧式球冠端面圆柱体（图十九），建立三维直角坐标系（图二十）：



图十九



图二十

2) 首先单考虑纵向倾斜角度 α 的影响，在第一问倾斜椭圆柱罐容积的公式基础上，令 $a = b = r$ ，即可得油罐直筒圆柱部分体积：

$$\begin{aligned}
V_{\text{体}}(h, \alpha) &= \int_{x_{\text{下}}}^{x_{\text{上}}} \left(\frac{r^2 \pi}{2} + r^2 \arcsin \left[\frac{-r + h - x \tan \alpha}{r} \right] \right. \\
&\quad \left. + r(-r + h - x \tan \alpha) \sqrt{1 - \frac{(-r + h - x \tan \alpha)^2}{r^2}} \right) dx \\
&= F(x_{\text{上}}) - F(x_{\text{下}})
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
F(x, \alpha) &= \frac{r^2 \pi}{2} x + ((-r + h - x \tan \alpha) \arcsin \left[\frac{-r + h - x \tan \alpha}{r} \right] \\
&\quad + \sqrt{r^2 - (-r + h - x \tan \alpha)^2} \frac{-r^2}{\tan \alpha} + \frac{1}{3r} 2 \arcsin(2\alpha) (h \cos \alpha \\
&\quad - x \sin \alpha) ((2r - h) \cos \alpha \\
&\quad + x \sin \alpha) \sqrt{(h - x \tan \alpha)(2r - h + x \tan \alpha)}
\end{aligned}$$

3) 在球冠体积的计算中, 由于对倾斜的油面体积严格的积分计算量非常大, 于是采用近似算法, 将倾斜的油面 (蓝色) 以下油缺体积转化水平油面 (橙色) 以下油缺体积, 如图十五, 其中水平油面高度为倾斜部分高度一半。

在图十五坐标系中, 球面方程为:

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

球冠和圆柱直筒部分连接处截面方程为:

$$x^2 + y^2 = R^2 - z_0^2$$

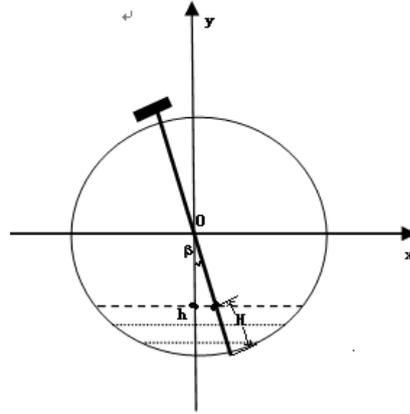
对水平油面 (橙色) 以下油缺部分三重积分得:

$$\begin{aligned}
V_{\text{球缺}}(h, \alpha) &= 2 \int_{-\sqrt{R^2 - z_0^2}}^h dy \int_0^{\sqrt{R^2 - z_0^2 - y^2}} dx \int_{z_0 - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^0 dz = \frac{1}{6} \pi (2R^3 - 3R^2 z_0 + z_0^3) \\
&\quad + \frac{1}{3} (-2hz_0 \sqrt{-h^2 + R^2 - z_0^2} + (-3R^2 z_0 + z_0^3) \arctan \left[\frac{h}{\sqrt{-h^2 + R^2 - z_0^2}} \right] \\
&\quad + 2R^3 \arctan \left[\frac{hz_0}{R \sqrt{-h^2 + R^2 - z_0^2}} \right] - h^3 \arctan \left[\frac{\sqrt{-h^2 + R^2 - z_0^2}}{z_0} \right] \\
&\quad + 3hR^2 \arctan \left[\frac{\sqrt{-h^2 + R^2 - z_0^2}}{z_0} \right])
\end{aligned}$$

(由于 Mathematica 积分得出的表达式非常复杂, 由论文篇幅所限这里不具体给出)

4) 得出圆柱直筒部分和球冠部分体积后, 易知罐容积为:

$$V_{\text{总}}(h, \alpha) = V_{\text{体}}(h, \alpha) + V_{\text{球缺1}}(h, \alpha) + V_{\text{球缺2}}(h, \alpha)$$



图二十一

5) 现在考虑横向偏转角度 β 的影响

横向偏转角度 β 后，油位探针显示高度与液面高度不一致，由几何关系得：

$$R - H = \frac{R - h}{\cos \beta}$$

所以 $h = R - (R - H) \cos \beta$ 。

将其代入 $V_{\text{总}}(h, \alpha)$ 得：

$$V_{\text{总}}(H, \alpha, \beta) = V_{\text{体}}(H, \alpha, \beta) + V_{\text{球缺1}}(H, \alpha, \beta) + V_{\text{球缺2}}(H, \alpha, \beta)$$

(由于表达式过于复杂，由论文篇幅所限这里不具体给出)

6.3 用最小二乘法和坐标轮换搜索法确定变位参数

6.3.1 模型建立

由以上分析得出了罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的函数关系 $V_{\text{总}}(H, \alpha, \beta)$ ，利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据可以得到很多组满足一定变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）的函数 $V_{\text{总}}(H)$ 上的点，问题则变为一个标准的参数识别为题，最小二乘算法是解决这类问题的一个很好的算法

1) 将初始油量设为 59000L，把附录 2 中两组出油量的值转化为一列表示（显示油高，实际油量）的点。

2) 因为上述 600 多组数据均满足表达式 $V_{\text{总}}(H, \alpha, \beta)$ ，任意给定一组有意义的参数 α 、 β ，计算值和测量值的总偏差是：

$$G(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^N (V_{\text{总}}(H_i, \alpha, \beta) - v_i)^2$$

显然,使得计算值和测量值的总偏差 $G(\alpha, \beta)$ 最小的参数 α 、 β 就是实际的参数。于是变成下面的最优化问题:

$$G(\alpha^*, \beta^*) = \text{Min}G(\alpha, \beta) \quad (\alpha, \beta > 0)$$

6.3.2 模型求解

由于采用积分方法得到体积计算公式十分的复杂,一般的搜索算法不能使用,为了能够求出里满足条件的参数值我们采用如下的计算:

1. 计算结果为: 当 $\alpha = 2.1167^\circ$, $\beta = 4.1517^\circ$ 时, $G(\alpha^*, \beta^*)$ 取到最小。

2. 计算过程为:

STEP1 采用蒙特卡洛方法进行全区间的随机搜索, 得到一组较优的解 $G_1(\alpha_1, \beta_1)$, $G_2(\alpha_2, \beta_2) \dots G_n(\alpha_n, \beta_n)$.

STEP2 采用坐标轮换法^[6]进行部分区域搜索

1) 对于由第一步得到的较优解 $G_i(\alpha_i, \beta_i)$ ($i=1, 2 \dots n$) 以 $G_i(\alpha_i, \beta_i)$ 起始点在 α 方向上进行局部的一维线搜索, 得到一个比原解更优的解, $G_n(\alpha_1^1, \beta_1)$, 局部的一维线搜索可以采用黄金分割法等基本算法。

2) 以 $G_i(\alpha_1^1, \beta_1)$ 为起始点在 β 方向上进行局部的一维线搜索, 得到一个比原解更优的解, $G_n(\alpha_1^1, \beta_1^1)$, 返回 1, 2 重复进行搜索直到所得点在局部的范围内在 α 与 β 两个方向上都是最优值停止, 将得到到局部最优解输出

3) 比较所有的局部最优解中选择最优的一个解作为全局最优解。

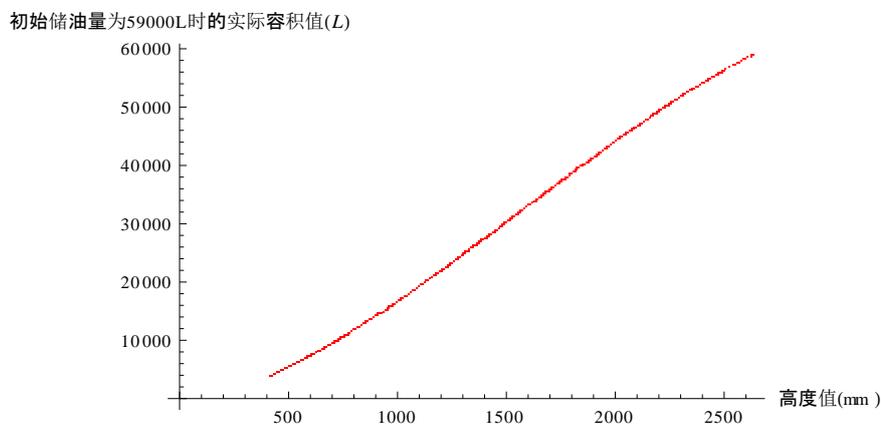
采用计算机模拟的方法进行搜索在一定程度上是可以相信的, 但是由于它的随机性使他们具有一定得误差, 因此在用蒙特卡诺方法进行搜索时可以多取几组, 以防止落入局部最优解。

6.4 变位后修订的罐容表

油位高度 (cm)	实际油品体 积 (L)	油位高度 (cm)	实际油品体 积 (L)	油位高度 (cm)	实际油品体 积 (L)
10	362.5	110	19259.4	210	46762.0
20	1077.5	120	21935.0	220	49317.5
30	2219.1	130	24668.6	230	51771.8
40	3698.1	140	27444.5	240	54105.7
50	5427.6	150	30247.0	250	56298.4
60	7366.0	160	33060.9	260	58326.0
70	9482.3	170	35870.7	270	60160.7
80	11750.8	180	38661.4	280	61766.7
90	14149.5	190	41417.4	290	63092.0
100	16658.5	200	44123.0	300	64013.4

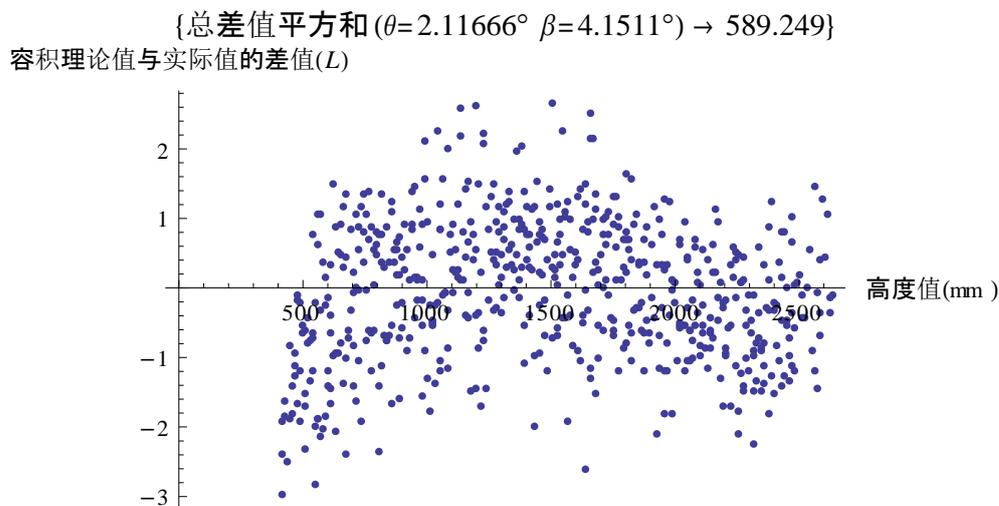
6.5 模型检验

1) 在初始油量为 59000L 的条件下，实验数据所给出的实际油量和显示油高的关系，如图二十二所示：



图二十二

2) 变位参数确定后，罐容积与显示油高的函数关系即确定。用曲线上对应的点与实验测得的数据点做差值，如图二十三，分析差值：



图二十三

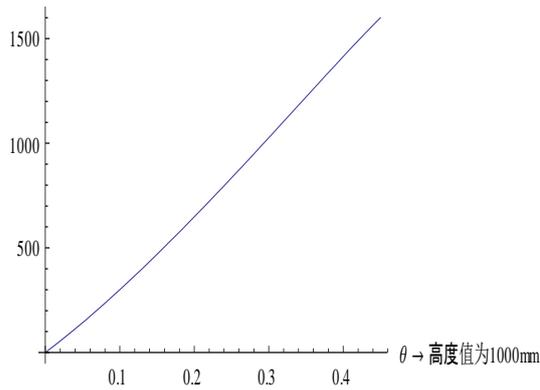
算得差值的均值为 $-0.0627593L$ ，均方差为 $0.974873L$ ，可知在该变位参数下，罐容积和显示油高函数曲线与实验所得实际值吻合的非常好，证明了模型的正确性与方法的可靠性。

七、灵敏度分析

1) 问题一灵敏度分析

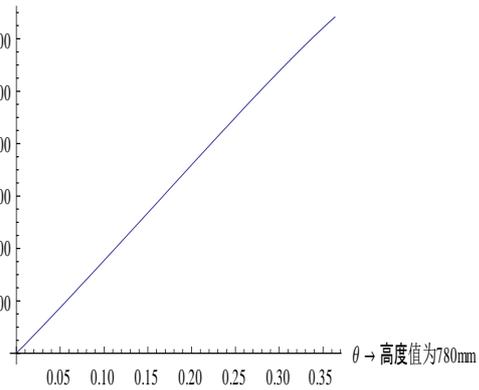
考虑 θ 的对绝对误差的影响, 固定油高度 y_0 , 可以得到绝对误差随 θ 的变化函数

绝对误差值(L)



图二十四

绝对误差值(L)



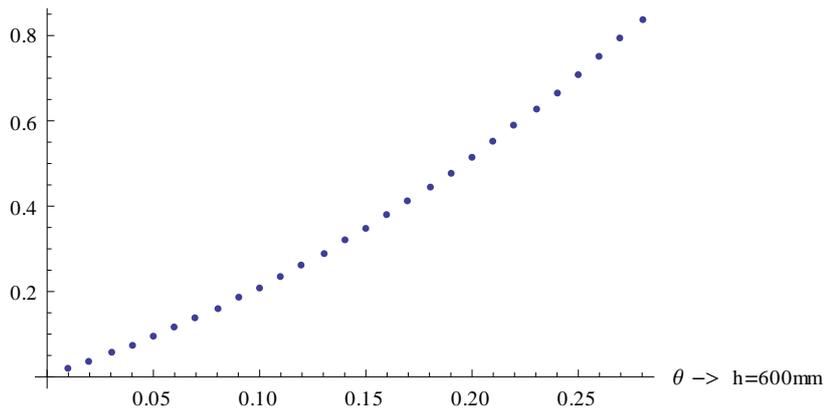
图二十五

直观看来绝对误差值随着 θ 的增加而增大的, 这点可以说明随着 θ 的增加储油量的实际值减少, 在标定量不变的情况下绝对误差必然会增加, 而且从图形中知道对于固定的高度值其绝对误差是近似线性增加的。同时也容易得到当高度值在中间部分时这种影响最大, 两端最小。

2) 问题二灵敏度分析

当 H 为一个定值时可以得到相对误差随 θ 的变化函数

相对误差



图二十六

由于 H 值越大 θ 越大, 从图中我们可以看出当 H 一定时相对误差随 θ 线性增加, 当 H 越大时斜率也越大。

3) 在问题二球冠体积的求解中, 采用的近似计算产生的误差随 θ 的增大而增大, 当 $\theta = 0$ 时误差为 0, 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 误差最大。

八、模型拓展

对于球冠圆柱型储油罐模型：

1) 水平放置时，油罐直筒部分体积为：

$$V_{\text{身}} = R^2 L \left[\frac{1}{2} \pi + \left(\frac{H}{R} - 1 \right) \sqrt{2 \frac{H}{R} - \left(\frac{H}{R} \right)^2} + \text{ArcSin} \left(\frac{H}{R} - 1 \right) \right]$$

可知在 R 一定的情况下，仅与 $\frac{H}{R}$ 有关，可令 $V_{\text{身}} = R^2 L f_1 \left(\frac{H}{R} \right)$ ；

$$\text{同理} \quad V_{\text{头}} = \int_{-\sqrt{R^2 - z_0^2}}^H dy \int_0^{\sqrt{R^2 - z_0^2 - y^2}} dx \int_{z_0 - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^0 dz = R^3 f_2 \left(\frac{H}{R}, f \right)$$

故可运用 $\frac{H}{R}$ 与 $V_{\text{总}}$ 的对应关系列出简易的表格以供查询。

2) 倾斜放置时，两球冠体积：

$$V_{\text{头}1} \approx R^3 f_2 \left(\frac{H+h_1}{2R}, f \right), \quad V_{\text{头}2} \approx R^3 f_2 \left(\frac{H+h_2}{2R}, f \right)$$

其中 h_1 、 h_2 为两球冠的最大油高，可由 H 与 α 、 L 、 R 的关系求得，而 f_2 可由水平情况得出，进而由此亦可制得简易表格以供查询。

九、模型评价

8.1 模型优点

1) 第一问由积分得出理论函数关系后，还进行了与实验值的比较，分析误差并添加了修正值，使修正后的函数关系与实际值的误差率减小为 0.8%，非常精确的拟合了实际情况，可以给出准确的变位后修订的罐容表。

2) 第二问中巧妙采用了球冠体积的近似算法，避免了常规积分带来的计算量的繁琐，提高了运算效率。

3) 第二问中将两组出油量数据结合在一起模拟实际曲线，增大了采样点数，提高了最后结果的精确度。

4) 确定变位参数时采用了比较精确与高效的最小二乘法和相应优化搜索算法，提高了运算效率。

8.2 模型缺点

主要还是运用物理数学知识采用积分法建立模型，没有比较创新的思维，所以总体上的计算效率并没有很大的提高。

十、参考文献

- [1] 姜启源 谢金星 叶俊, 数学模型 (第三版): 28 页, 北京, 高等教育出版社, 2005 年。
- [2] 管冀年, 卧式储油罐罐内油品体积标定的实用方法, 计量与测试技术, NO. 3: 28 页, 2004 年。
- [3] 徐展福, 内浮顶油罐储油计量不准的原因分析, 油气储运, NO. 5: 30 页, 1992 年。
- [4] 程继元, 浅谈影响油罐标定与计量的因素及其修正方法, 石油商技, NO. 22: 33 页, 2004 年。
- [5] 王郑耀, 卧式加油灌剩余油料体积的计算, <http://wangzhengyao.xiloo.com>
2010 年 9 月 12 日
- [6] 龚纯, 精通 MATLAB 最优化计算: 196 页, 北京, 电子工业出版社, 2009 年。